21

Matrices symétriques définies positives

Pté Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, $n\geq p$. Soit $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

21.1 • $B'B\in\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ est symétrique positive

21.2 • $rg(B)=p \Leftrightarrow Ker(B)=\{0\} \Leftrightarrow B'B$ est symétrique définie positive

21.3 • $rg(B)=p \Rightarrow P_{Im B}^{\perp} = B(B'B)^{-1}B'$.

a) Soit $(i,j)\in[1..p]^2$ $(B'B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B'_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,i} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} B_{k,i}$

$= \sum_{k=1}^{n} B'_{j,k} B_{k,i} = (B'B)_{j,i}$

donc $B'B$ est symétrique.

Soit $X\in\mathbb{R}^p$ $X'(B'B)X = (BX)'BX = \|BX\|^2 \geq 0$

donc $B'B$ est positive.

b) B définit une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ ds $\mathbb{R}^n$ donc le théorème du rang donne $\dim\mathbb{R}^p = \dim(Im B) + \dim(Ker B)$ soit $p = rg(B)+\dim(Ker B)$

Donc $rg(B)=p \Leftrightarrow \dim Ker B = 0 \Leftrightarrow Ker B = \{0\}$

$\Leftrightarrow (\forall U\in\mathbb{R}^p\ BU=0 \Rightarrow U=0)$

$\Updownarrow$

$\|BU\|^2=0$

$\Updownarrow$

$(BU)'BU=0$

$\Updownarrow$

$\Leftrightarrow (\forall U\in\mathbb{R}^p,\ U'(B'B)U=0 \Rightarrow U=0)$

$\Leftrightarrow B'B$ est définie.

Enfin une matrice symétrique définie positive est inversible puisqu'elle est diagonalisable à valeurs propres non nulles.

c) $B'B$ est inversible donc $(B'B)^{-1}$ a bien un sens.

$P = \underbrace{\underset{n,p}{B}\ \underset{p,p}{(B'B)^{-1}}\ \underset{p,n}{B'}}_{p,n} \in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. $P^2 = B(B'B)^{-1}\underbrace{B'.B(B'B)^{-1}}B'$

$= B(B'B)^{-1}\ I_n\ B'$

$= B(B'B)^{-1}B = P$

donc P est bien un projecteur.

$P' = (B(B'B)^{-1}B')' = (B')'((B'B)^{-1})'B' = B((B'B)')^{-1}B' = B(B'B)^{-1}B' = P$

donc P est un projecteur orthogonal

⚠ P n'est pas une matrice orthogonale (c'est $P' = P^{-1}$ qui équivaut à $P \in O_n(\mathbb{R})$)

P est un projecteur orthogonal signifie que $Ker(P)^{\perp} = Im(P)$.

En effet soit $X \in Ker(P)$ et $Y = P(Z) \in Im(P)$.

$Y'X = (PZ)'X = Z'P'X = Z'(PX) = Z' \times 0 = 0$ d'où $Y' \perp X$.

$P = B((B'B)^{-1}B')$ donc $Im\, P \subset Im\, B$.

Soit $u \in Im\, B$. Il existe $v \in E$, $u = Bv$. $Pu = B\underbrace{(B'B)^{-1}B'B}_{I_p}v = Bv = u$

donc $u = Pu \in Im\, P$ d'où $Im\, B \subset Im\, P$.

Par double inclusion on a $Im\, P = Im\, B$

d'où P est le projecteur orthogonal sur l'image de B.

21.4 **Pté** Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

V est symétrique définie positive $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \text{ symétrique} \\ \text{définie positive telle que } V = C'C \end{array} \right.$

V est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une B.O.N autrement dit il existe $Q \in O_d(\mathbb{R})$ et $D = diag((\lambda_i)_{i \in [1..d]})$ telles que $V = QDQ^{-1}$. $(\lambda_i)_{i \in [1..d]}$ sont les valeurs propres de V. Soient $(X_i)_{i \in [1..d]}$ la famille de vecteurs propres associés. $\forall i \in [1..d]$ $X_i'VX_i = X_i'(\lambda_i X_i) = \lambda_i X_i'X_i = \lambda_i \|X_i\|^2$

Or puisque V est déf. positive $\forall i \in [1..d]$ $0 < X_i'VX_i = \lambda_i \|X_i\|^2$ et puisque $X_i \neq 0$ on a $\forall i \in [1..d]$ $0 < \lambda_i$. On peut donc poser $C = Q\, diag(\sqrt{\lambda_i})Q^{-1}$. On note $\sqrt{D} = diag(\sqrt{\lambda_i})$

- $C' = (Q\sqrt{D}Q^{-1})' = (Q^{-1})'(\sqrt{D})'Q'$ or Q ortho donc $Q' = Q^{-1}$ et $(Q^{-1})' = Q'' = Q$ et $\sqrt{D}$ diago donc $\sqrt{D}' = \sqrt{D}$ d'où $C' = Q\sqrt{D}Q^{-1} = C$ donc C est symétrique
- $C'C = C \times C = Q\sqrt{D}Q^{-1}Q\sqrt{D}Q^{-1} = Q\, diag(\sqrt{\lambda_i}) \times diag(\sqrt{\lambda_i})Q^{-1} = Q\, diag(\sqrt{\lambda_i} \times \sqrt{\lambda_i})Q^{-1}$ $= Q\, diag(\lambda_i)Q^{-1} = QDQ^{-1} = V$
- Soit $X \in \mathbb{R}^d$. On pose $Y = Q^{-1}X$. $Y' = X'(Q^{-1})' = X'Q$

$X'CX = X'Q\sqrt{D}Q^{-1}X = Y'\sqrt{D}Y = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{y_i^2}_{\geqslant 0} \underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{> 0}$

donc $X'CX \geqslant 0$ et $X'CX = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [1..d]\ y_i = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow X = 0$

donc C est définie positive